風險量化理論

壹、市場風險

市場風險係指金融資產價值在某段期間因市場價格不確定變動，例如：利率、匯率、權益證券和商品價格變動，可能引致自有部位虧損的風險。

一、風險值(VaR，Value at Risk)

風險值為給定信賴水準下，投資組合於期間內之最大可能損失金額。在不同資產報酬分配的假設及參數的使用下，估算出的風險值將有所不同，若未將資產報酬率分配作正確的假設，所估計出來的風險值會有不精確的問題發生。而風險值易於了解的特性，常是用來溝通全公司所面臨風險的絕佳工具。

(一)歷史模擬法 (Historical Simulation)

歷史模擬法為常見估算風險值的方法，它直接利用歷史資料估計未來可能發生的情況，即假設金融商品的過去價格變化會在未來重複出現。歷史模擬法不需事先得知投資組合的報酬分配，可以避免報酬分配假設錯誤的風險，也可以較精確反應各風險因子的機率分配特性，例如一般資產報酬具有的厚尾、偏態現象就可能透過歷史模擬法表達出來。但此方法隱含著未來風險因子的變動會與過去表現相同的假設，事實上真實市場之價格變化卻有可能不依循過去之路徑。而選取資料時，資料筆數要夠多才有代表性，但是太多久遠的資料會喪失預測能力，或過少的時間資料又可能會遺失過去曾發生過的重要訊息，兩者的極端情況都會使歷史模擬法得所到的風險值可信度偏低。

歷史模擬法計算步驟如下：

1.確定風險因子(如匯率、資產價格及利率等)。
2.選取歷史期間的長度。
3.蒐集資料，並計算每日波動之程度，及其所有相對應之損益分佈。
4.將所有相對的損益按大小依序排列，模擬出未來的損益分配。
5.選定所要估計之信賴水準，在該百分位數之價值即為估計之風險值。

以計算 1 日信賴水準 95%之股票風險值為例：

1.風險因子為股票收盤價。
2.歷史期間為 1 年(250 天)。
3.蒐集 251 天收盤價資料 S_1、S_2、…、S_{251}，並計算出 250 個股價報酬率 $R_i=(S_{i+1}-S_i)/S_i$，i=1…250。
4.將股價報酬率由小到大排列，例如：-7%、-6.85%、-6.63%、…、6.21%、6.76%、6.92%。

5. 得到信賴水準95%下百分位數(第12.5位)為-5.02%，若股票價值為100萬元，則估算出風險值為100萬元*5.02%=5.02萬元。

(二)變異數-共變異數法 (Variance-Covariance Approach)

變異數-共變異數法又稱為Delta Normal法。其特色在於假設個別資產報酬率符合常態分配，而且具有序列獨立的特性。由這些資產所構成的線性組合資產，一定會服從常態分配，藉由常態分配的性質估計出給定評估期間與信賴水準下的風險值。但變異數-共變異數法無法描述資產報酬率分配若有厚尾、偏態、高峰的現象，因為極端損失事件對投資組合資產價值的衝擊無法由常態分配來評估，且對非線性損益型態的商品(如選擇權、權證、債券)的誤差較大。

舉例來說，考慮一個包含A股票1,000,000元及B股票500,000元的投資組合。假設投資組合符合常態分配，變異係數(ρ)為0.3，A股票標準差(σ_A)為0.02，B股票標準差(σ_B)為0.01，則投資組合標準差(σ_{A+B})為

$$\sigma_{A+B} = \sqrt{\sigma_{\mathrm{A}}^2 + \sigma_B^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B} = \sqrt{0.02^2 + 0.01^2 + 2\times 0.3\times 0.02\times 0.01} = 0.025$$

根據風險值公式$VaR = -Z_\alpha \times \sigma_{A+B} \times \nu \times \sqrt{T}$，其中 ν 為投資組合價值，T為評估期間，Z_α為信賴水準 α 下之標準常態數值，則一日信賴水準為95%的風險

值為$VaR = -1.645\times 0.025\times 1500000\times \sqrt{1} = 61687.5$。

(三)蒙地卡羅模擬法 (Monte Carlo Simulation)

蒙地卡羅模擬法假設投資組合的價格變動服從某種隨機過程的型態，藉由電腦模擬產生數次可能價格的路徑，並依此建構投資組合的報酬分配，進而估計其風險值，是一種基於大數法則的實證方法，當實驗的次數越多，它的平均值也就會越趨近於理論值。

蒙地卡羅模擬法最能涵蓋投資組合的各種風險因子，特別是一些難以進行估算的非線性投資組合，例如選擇權等。最主要的缺點就是電腦資源需求高和大量重複的抽樣，因此計算成本較高且耗費時間較長。而若代表價格變動的隨機模型選擇不當，則會有導致模型風險的可能。

蒙地卡羅模擬法計算步驟如下(以股票為例，求95%信賴水準下的風險值)：

1. 選定標的資產價格產生模型、平均值和標準差。假設股價的變動過程為幾何布朗寧運動(Geometric Brownian Motion)，因此股價服從對數常態分配(Lognormal Distribution)，如公式：$S_{t+1} = S_t e^{(r-0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}}$，$S_{t+1}$為明

日可能的股價，S_t為今日股價，r 為無風險利率，σ 為股價報酬波動率，ε 為服從標準常態分配之隨機亂數，Δt 為一日。

2.重複抽取 n+1 個隨機變數 ε ，得到 n 個股價報酬率。

3.將 n 個股價報酬率由小到大排列，得到 95%信賴水準下之股價報酬率分位數為 R’ 。

4.計算風險值為$VaR = V \times R'$，其中 V為股票價值。

二、回溯測試(Backtesting)

不管用什麼方法計算風險值，都應該做回溯測試，檢視過去用這個方法評估風險值的準確度有多高。回溯測試比較一段期間估計風險值與實際值之差異，探討實際值穿透估計風險值之次數，以確認模型估計結果是否符合最初信賴水準的設定，若模型穿透次數過多，代表模型估計失敗的比率太高。

巴賽爾資本協定(Basel, 1996)主張以回溯測試來分析由內部風險值模型來解釋自有資本適足比率的可接受性。依據該協定，目前回溯測試的架構，應在 99%的信賴水準下，記錄過去一年(250 個營業日)每日實際損失與報酬超過其內部模型所估算之風險值的穿透次數。在 99%信賴水準下，平均在 250 個營業日內，發生 1%或 2.5 次的超限數是可以預期的。根據該協定，穿透次數越多，乘數(k)越高，而所須提列的資本準備也相對提高。穿透次數，區段，以及乘數之關係彙總如下表：

表一：巴賽爾懲罰區(The Basel Penalty Zone)

區段	穿透次數	乘數 (k)
綠燈	0 ～ 4	0
黃燈	5	0.4
	6	0.5
	7	0.65
	8	0.75
	9	0.85
紅燈	10	1

三、敏感度分析(Sensitive analysis)

敏感性分析指從許多不確定性因子中，找出相對於商品有重要影響的敏感性因子，並分析、計算其對商品影響的變動範圍和敏感性程度，進而判斷商品承受風險的能力。以下為不同商品常用的敏感性分析因子：

(一)存續期間（Duration）

存續期間的意義為殖利率變動所造成債券價格的變動率，是債券價格對利率

變動的敏感性指標。它代表了以某個利率投資某支債券可以回本的期間，所以存續期間也是一種時間長短的觀念。由於存續期間具有這種價格敏感性的分析意義，使存續期間也成為概算債券投資報酬率最簡便的工具。

1.Macaulay Duration：以各期的現金流量(利息及本金)的現值相對於各期現金流量現值的加總(債券的價格)為權數所計算的平均到期期間。

$$Macaulay\ Duration = \frac{1}{\mathrm{p}}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{tC}{(1+y)^t} + \frac{nM}{(1+y)^n}\right]$$

其中，P 為債券價格，C 為票面利息，y 為市場利率，n 為債券付息期間，M 為債券面額。

2.Modified Duration (修正存續期間)：實際上常用修正存續期間來估算利率變化時，債券價格的變動。

$$Modified\ Duration = \frac{Macaulay\ Duration}{(1+\frac{y}{m})}$$

其中，y 為市場利率，m 為一年付息次數。

(二)DV01（Dollar Value of a basis point）

DV01 為當債券利率變動 1 bp(1 bp=0.0001)時，債券價格變動的絕對金額。

(三)Delta

Delta 是選擇權定價及避險的一個重要參數，代表選擇權對標的物價格的敏感度。定義為選擇權價值的變動相對於其標的價格變動的比率，也就是選擇權價格與標的價格關係曲線的斜率。

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

其中，C 為選擇權價格，S 為標的價格。

Delta 值介於-1 和 1 之間，如果為正值代表兩者同向變動，負值則代表兩者呈反向變動。例如一個買權的 Delta 值為 0.6，表示當標的價格上漲 1 元時，則選擇權價格上漲 0.6 元。

(四)Gamma

Gamma 代表 Delta 對標的價格的敏感度，也就是選擇權價值相對於其標的價格的二階偏導數。當 Gamma 越大的時候，代表 Delta 變動的幅度會越大，即 Delta 對於標的價格相當敏感。

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

其中，C 為選擇權價格，S 為標的價格。

Gamma 恆正並隨著標的價格變動，亦隨著到期期間而變動。對於價平的選擇權而言，Gamma 隨到期期間減少而增加，到期日很短的價平選擇權有很高的 Gamma 值，也就是選擇權價值對於標的價格變動非常敏感。

(五)Vega

選擇權價格不但隨標的價格改變而變動，也和波動率息息相關，而 Vega 代表波動率對標的價格的敏感度。價平附近的選擇權 Vega 通常較大，表示波動率變化對選擇權價格影響的程度較大，風險也較大，此時不但要注意標的價格變化，也同時要注意波動率的變化。

$$\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

其中，C 為選擇權價格，σ 為波動率。

四、情境分析 (Scenario Analysis)

情境分析為假設未來有可能會發生之情境，將其相關風險因子之變動加入目前之投資組合，每日計算出投資組合在該情境發生時所產生的損失金額。例如假設大盤指數一日跌幅為 7%或利率水準上升 5bp 等情境。定期更新情境假設以符合實際可能發生的狀況，如有必要可以更頻繁的更新情境的設定。

五、壓力測試 (Stress Test)

風險值雖能衡量一般情況下的可能損失，但通常引發金融危機的主因，多是極端情況所造成的強大損失，因此需對投資組合進行壓力測試，檢視在過去幾年間，市場真正發生的極端情形下，投資組合的表現如何，即檢查在機率分配上幾乎不可能發生，但實際上可能會發生的情形。例如假設遇到 921 大地震及美國 911 恐怖攻擊等重大歷史事件，或另行假設極端情況，計算出公司投資組合的可能損失金額，用以彌補風險值的不足。

貳、信用風險

信用風險係指交易對手 (包括證券發行人、契約交易相對人或債務方) 未能履行責任的可能性，且此種不履行責任的情況對公司之財務狀況造成損失的風險。

一、Z-Score 模型

Altman(1968)利用區別分析來研判公司是否可能發生財務危機。他選取了流動性、獲利能力、財務槓桿、償債能力以及週轉能力等 22 個財務比率， 以 1946 ~1965 年間的破產與正常公司各 33 家做為樣本公司，利用多變量的方式取得 5 個最具共同預測能力的財務比率，並將這些財務比率結合成綜合性指標(Z-Score)，來分析公司潛在的財務危機。

其模型如下：$Z = 1.2X_1 + 1.4X_2 + 3.3X_3 + 0.6X_4 + 1.0X_5$，其中各變數為

X_1=營運資金 / 總資產

X_2=保留盈餘 / 總資產
X_3=稅前息前盈餘 / 總資產
X_4=權益市值 / 負債總額
X_5=銷貨收入 / 總資產

Altman 研究結論發現，如果某家公司之 Z-score 超過 2.99 則為財務體質良好之公司，低於 1.81 則為財務狀況不良之公司；兩者之間為模糊地帶，多為分類錯誤所致。另外發現該模型在危機發生前一年及前二年正確區別率分別為 95%、72%。但由於該模型的變數未考慮風險概念及規模效果，故超過兩年以上之期間，此模型的預測能力大幅下降。

二、Logit 模型

Ohlson(1980)利用 Logit 模型發展違約預測模型，其以 1970 年至 1976 年為研究期間，採隨機抽樣法抽取美國 105 家財務危機公司及 2058 家正常公司，並用 9 個變數分別建立一年內、二年內及一年或二年內會發生財務危機的 Logit 預警模型，結果發現公司規模、財務結構、經營績效及流動性對企業財務危機有顯著的預測能力，而企業發生危機前一至三年之正確率分別為 96.12%、95.55%及 92.84%。

Logit 模型概念如下：假設違約事件的發生機率是藉由 Logistic 分配函數的累積機率轉變而成，並以財務比率作為迴歸分析模型的輸入變數，藉以求出該公司的違約機率，其公式如下：

$$P_i = \frac{1}{1+e^{Y_i}}$$

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

P_i：第 i 樣本公司之違約機率
Y_i：第 i 樣本公司之迴歸因變數
α：迴歸模型的截距或常數項
β_j：第 j 個迴歸係數
X_{ij}：第 i 個樣本公司的第 j 個解釋變數
ε_i：迴歸模型的誤差項

三、KMV 模型

穆迪 KMV 公司(1995)使用 Black & Scholes (1973)與 Merton (1974)之選擇權評價理論為核心，發展出違約風險衡量模型，稱之為 KMV Model。其利用市場及財務報表資訊，計算個別企業之違約風險(預期違約機率，EDF)，再配合該公司所擁有的信用資料庫，來衡量未來 1 年內公司發生違約的機率。

步驟一：計算公司資產的市場價值及波動性

該模型依據選擇權評價理論為概念，當公司舉債經營時，就好似公司股東向公司債權人買進一個買權，而該買權的標的資產價格相當於公司資產價值，履約價格可視為公司負債。所以當負債到期時，若公司資產價值高於負債，則股東會履行買權，也就是股東會清償債務；但若公司資產價值低於負債，則股東因無力償還負債，就會選擇違約。故可利用選擇權評價方式來評定公司價值。

首先，假設公司標的資產的市值變動為一隨機過程

$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz$ ，其選擇權評價方程式表示如下：

$$V_E = V_A N\left(d_1\right) + e^{-rfT} XN\left(d_2\right)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{V_A}{X}) + (rf + \frac{\sigma_A}{2})T}{\sigma_A \sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T}$$

V_A：公司資產價值

V_E：股東權益價值

X：負債總額

σ_A：資產價值變動率之波動率

rf：無風險利率

T：公司到期清算期間

另依據 Ito's Lemma 原理，權益的波動性與資產的波動性存在著有下式的關係，當槓桿程度越高的企業其權益的風險越高，其方程式表示如下：

$$\sigma_{\mathrm{E}} = \frac{V_A}{V_E} N\left(d_1\right) \sigma_{\mathrm{A}}$$

透過以上兩個方程式，帶入交易市場上已知的股票價格與股票價格波動率(V_E 、 σ_{E})後，即可以解出隱含的資產市場價值（ V_A ）與資產波動性（ σ_{A} ）。

步驟二：估計出違約距離

違約事件發生在公司資產價值低於負債總額(違約點)時，通常將負債總額視為公司之違約點，如果經由資產波動性來衡量及標準化，則導出公司的違約間距(Distance to Default，DD)，數字愈大則代表資產的價值距離違約點愈遠，故公司違約的機率越小(Crosbie 1999)。

違約間距的公式如下：

$$DD = \left[\frac{\ln \frac{V_A}{X} + (\mu - \frac{\sigma_A^2}{2})t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right]$$

又穆迪 KMV 公司觀察過去數百家公司後發現，當公司發生違約時，該公司的資產價值大約介於總負債價值及短期負債價值之間。因此，資產價值低於總負債價值的臨界點所決定出的違約機率，並不能精確衡量出實際違約的機率。故穆迪 KMV 公司在計算違約距離時，依據其實證結果(Bohn 1999)之違約點（Default Point；簡稱 DPT），短期負債加上二分之一的長期負債)計算，其違約間距的公式如下：

$$DD = \left[\frac{\ln \frac{V_A}{DPT} + (\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2})t}{\sigma_A \sqrt{t}} \right]$$

步驟三：估計違約機率

依據步驟二所求得的違約間距(DD)，對照穆迪 KMV 之歷史資料庫，根據資料庫中具有相同違約距離之公司，對映出預期違約機率(EDF，Expected Default Frequencies)。

參、作業風險：

作業風險，係指起因於內部作業流程、人員及系統之不當或失誤，或因外部事件而造成之直接或間接損失之風險，不包括法律風險、策略風險及聲譽風險等。

損失分配法(LDA，Loss Distribution Approach)

損失分配法是使用作業風險損失事件之發生頻率及嚴重性，來評估作業風險的一種方法。運用依業務別之損失資料與作業風險損失事件型態矩陣之損失分配進行估計。在假設未來一段時間及一定信賴區間下，便可利用損失分配計算作業風險應計提資本。

肆、風險調整績效評估：

一般評估績效的方法，主要是使用 ROA(Return on Asset)以及 ROE(Return on Equity)兩項指標來評估經營績效。但獲利主要是靠風險的承擔，所以在運用資本創造報酬的同時，其實也面臨了虧損的風險，所以在績效評估指標加入風險因素的考量，並與以調整，才能正確反應操作績效的優劣。

一、風險調整報酬(RAPM，Risk-Adjusted Performance Measurement)

其為報酬與風險的相對績效衡量指標。分子是損益金額，分母是風險性資本(Risk Capital)，亦稱之為經濟資本(Economic Capital，EC)。而經濟資本係指可覆蓋未來可能產生的損失之資本，故可用風險值(VaR)代表 EC。其公式如下：

$$RARM = \frac{\text{Pr}\,ofit}{EC}$$

二、風險調整報酬（RAROC，Risk-Adjusted Return on Capital）

RAROC 為一風險調整後績效評估方法，為美國信孚銀行(Bankers Trust)於 1970 年代後期所發展出的指標，做為一個客觀衡量績效的標準。其主要是由 RAPM 的概念加以調整，RAROC 的公式如下：

$$RARM = \frac{Profit - Risk\ Adjustment}{EC}$$

RAROC 使用上可分為前瞻型(forward looking)與回顧型(backward looking)二種。前者使用當期單位資產與負債資訊，導出事前 RAROC，作為部門風險性資產配置決策工具；後者則使用業務單位過去盈餘，導出事後 RAROC，作為評估單位操作績效。在決策過程中，管理階層需決定臨界率(hurdle rate〉，與各業務單位 RAROC 相比較後，決定整體公司之風險資本配置。

三、夏普比率(Sharpe Ratio）

夏普比率為一相對績效衡量指標，為夏普在 1966 年提出。其衡量獲利與風險之間的抵換關係，當數字越高，績效愈佳，表示其承擔每單位風險所獲得的報酬越高。公式表示如下：

$$Sharpe = \frac{\overline{R_p} - r_f}{\sigma_p}$$

其中，$\overline{R_p}$ 為投資組合平均報酬率，σ_p 為其波動率，r_f 為無風險報酬率